Recherche Opérationnelle

Anas RACHID

Université Hassan II,Mohammedia-Casablanca

École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers

ENSAM-Casablanca

Octobre 2013

Recherche opérationnelle ?

Définition

Ensemble de méthodes :

- algorithmiques
- mathématiques
- modélisation

afin de prendre des décisions optimales ou proches de l'optimum dans des problèmes complexes, qui traitent de la maximisation d'un profit ou la minimisation d'un coût.

Recherche opérationnelle ?

Définition

Ensemble de méthodes :

- algorithmiques
- mathématiques
- modélisation

afin de prendre des décisions optimales ou proches de l'optimum dans des problèmes complexes, qui traitent de la maximisation d'un profit ou la minimisation d'un coût.

Donc nous allons faire de l'**optimisation**. (avec et sans contraintes)

Recherche opérationnelle :Optimisation

Optimisation

L'optimisation est une méthode qui cherche la meilleure utilisation, des ressources rares ou des activités, dans une situation réelle mais décrite par un modèle mathématique

Recherche opérationnelle :Optimisation

Optimisation

L'optimisation est une méthode qui cherche la meilleure utilisation, des ressources rares ou des activités, dans une situation réelle mais décrite par un modèle mathématique

Modèle

Un modèle est une transformation formelle d'une réalité dans laquelle des décisions doivent être prises en vue d'un objectif et/ou des contraintes sur ces décisions.

Recherche opérationnelle :Optimisation

Il existe une infinité d'applications où des modèles d'optimisation peuvent être utiles.

Domaines d'applications

- **Finance** : Il faut maximiser le profit espéré d'un ensemble d'investissements en respectant des limites budgétaires et des limites imposées sur le niveau de risque.
- **Logistique** : Il faut visiter tous les clients une fois (sans répétition) d'une manière qui minimise la distance parcourue.
- **Production/ordonnancement** : Affecter des tâches aux machines d'une manière que le temps nécessaire pour qu'une machine termine ses tâches soit minimisé.

Optimisation

Sans contrainte

- Un peu de calcul différentiel
- Un peu de calcul matriciel
- un logiciel

Avec contrainte

Programmation linéaire : Simplexe

1. un peu de calcul matriciel
2. un logiciel

Optimisation

Sans contrainte

- Un peu de calcul différentiel
- Un peu de calcul matriciel
- un logiciel

Avec contrainte

Programmation linéaire : Simplexe

1. un peu de calcul matriciel
2. un logiciel

Optimisation

Sans contrainte

- Un peu de calcul différentiel
- Un peu de calcul matriciel
- un logiciel

Rappel : Calcul diff. et matriciel

Programmation linéaire

Objectif

Objectif

résoudre un problème d'optimisation avec **maximisation** ou **minimisation** d'une fonction linéaire (ou fonction objectif) sous à un certain nombre de contraintes.

Objectif

Objectif

résoudre un problème d'optimisation avec **maximisation** ou **minimisation** d'une fonction linéaire (ou fonction objectif) sous à un certain nombre de contraintes.

Méthodologie

Écriture du problème sous la forme : $\begin{cases} \blacktriangleright \text{ d'inéquations} \\ \blacktriangleright \text{ d'un objectif à optimiser} \end{cases}$

C'est ce qu'on appelle **programme linéaire**.

Méthodologie

Étapes de formulation

Écriture du problème sous la forme : $\begin{cases} \blacktriangleright \text{ d'inéquations} \\ \blacktriangleright \text{ d'un objectif à optimiser} \end{cases}$

Généralement il y a trois étapes à suivre pour pouvoir construire le modèle d'un programme linéaire (PL) :

1. Identifier les variables du problème à valeur non connues (variable de décision) et les représenter sous forme symbolique (exp. x_1, y_1).
2. Identifier les restrictions (les contraintes) du problème et les exprimer par un système d'équations linéaires.
3. Identifier l'objectif ou le critère de sélection et le représenter sous une forme linéaire en fonction des variables de décision. Spécifier si le critère de sélection est à maximiser ou à minimiser.

Méthodologie

Étapes de formulation

Écriture du problème sous la forme : $\begin{cases} \blacktriangleright \text{ d'inéquations} \\ \blacktriangleright \text{ d'un objectif à optimiser} \end{cases}$

Généralement il y a trois étapes à suivre pour pouvoir construire le modèle d'un programme linéaire (PL) :

1. Identifier les variables du problème à valeur non connues (variable de décision) et les représenter sous forme symbolique (exp. x_1, y_1).
2. Identifier les restrictions (les contraintes) du problème et les exprimer par un système d'équations linéaires.
3. Identifier l'objectif ou le critère de sélection et le représenter sous une forme linéaire en fonction des variables de décision. Spécifier si le critère de sélection est à maximiser ou à minimiser.

Méthodologie

Étapes de formulation

Écriture du problème sous la forme : $\begin{cases} \blacktriangleright \text{ d'inéquations} \\ \blacktriangleright \text{ d'un objectif à optimiser} \end{cases}$

Généralement il y a trois étapes à suivre pour pouvoir construire le modèle d'un programme linéaire (PL) :

1. Identifier les variables du problème à valeur non connues (variable de décision) et les représenter sous forme symbolique (exp. x_1, y_1).
2. Identifier les restrictions (les contraintes) du problème et les exprimer par un système d'équations linéaires.
3. Identifier l'objectif ou le critère de sélection et le représenter sous une forme linéaire en fonction des variables de décision. Spécifier si le critère de sélection est à maximiser ou à minimiser.

Méthodologie : exemples

Exemple 1

Un agriculteur veut allouer 150 hectares de surface irrigable entre culture de tomates et celles de piments.

Il dispose de 480 heures de main d'œuvre et de $440\ m^3$ d'eau.

Un hectare de tomates demande 1 heure de main d'œuvre, $4\ m^3$ d'eau et donne un bénéfice net de 100 dirhams. Un hectare de piments demande 4 heures de main d'œuvre, $2\ m^3$ d'eau et donne un bénéfice net de 200 dirhams.

Le bureau du périmètre irrigué veut protéger le prix des tomates et ne lui permet pas de cultiver plus de 90 hectares de tomates. Quelle est la meilleure allocation de ses ressources ?

Question : Modéliser le problème et écrire le programme linéaire.

Méthodologie : exemples

Étape 1 :Identification des variables de décision.

Les **deux inconnues** que l'agriculteur doit déterminer sont les surfaces à allouer pour la culture de **tomates** et de **piments** :

- x_1 : la surface allouée à la culture des tomates
- x_2 : la surface allouée à la culture des piments

Nous avons : les variables de décision x_1 et x_2 sont positives : $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Méthodologie : exemples

Étape 2 : Identification des contraintes

Dans ce problème les contraintes représentent la disponibilité des **facteurs de production** :

- **Terrain** : l'agriculteur dispose de 150 hectares de terrain, ainsi la contrainte liée à la limitation de la surface de terrain est $x_1 + x_2 \geq 150$
- **Eau** : la culture d'un hectare de tomates demande $4\,m^3$ d'eau et celle d'un hectare de piments demande $2\,m^3$ mais l'agriculteur ne dispose que de $440\,m^3$. La contrainte qui exprime les limitations des ressources en eau est $4x_1 + 2x_2 \geq 440$
- **Main d'oeuvre** : Les 480 heures de main d'œuvre seront départager (pas nécessairement en totalité) entre la culture des tomates et celles des piments. Sachant qu'un hectare de tomates demande une heure de main d'œuvre et un hectare de piments demande 4 heures de main d'œuvre alors la contrainte représentant les limitations des ressources humaines est $x_1 + 4x_2 \geq 480$
- **Les limitations du bureau du périmètre irrigué** : Ces limitations exigent que l'agriculteur ne cultive pas plus de 90 hectares de tomates. La contrainte qui représente cette restriction est $x_1 \geq 90$

Méthodologie : exemples

Étape 2 : Identification des contraintes

Dans ce problème les contraintes représentent la disponibilité des **facteurs de production** :

- **Terrain** : l'agriculteur dispose de 150 hectares de terrain, ainsi la contrainte liée à la limitation de la surface de terrain est $x_1 + x_2 \geq 150$
- **Eau** : la culture d'un hectare de tomates demande $4\,m^3$ d'eau et celle d'un hectare de piments demande $2\,m^3$ mais l'agriculteur ne dispose que de $440\,m^3$. La contrainte qui exprime les limitations des ressources en eau est $4x_1 + 2x_2 \geq 440$
- **Main d'oeuvre** : Les 480 heures de main d'œuvre seront départager (pas nécessairement en totalité) entre la culture des tomates et celles des piments. Sachant qu'un hectare de tomates demande une heure de main d'œuvre et un hectare de piments demande 4 heures de main d'œuvre alors la contrainte représentant les limitations des ressources humaines est $x_1 + 4x_2 \geq 480$
- **Les limitations du bureau du périmètre irrigué** : Ces limitations exigent que l'agriculteur ne cultive pas plus de 90 hectares de tomates. La contrainte qui représente cette restriction est $x_1 \geq 90$

Méthodologie : exemples

Étape 2 : Identification des contraintes

Dans ce problème les contraintes représentent la disponibilité des **facteurs de production** :

- **Terrain** : l'agriculteur dispose de 150 hectares de terrain, ainsi la contrainte liée à la limitation de la surface de terrain est $x_1 + x_2 \geq 150$
- **Eau** : la culture d'un hectare de tomates demande $4\,m^3$ d'eau et celle d'un hectare de piments demande $2\,m^3$ mais l'agriculteur ne dispose que de $440\,m^3$. La contrainte qui exprime les limitations des ressources en eau est $4x_1 + 2x_2 \geq 440$
- **Main d'oeuvre** : Les 480 heures de main d'œuvre seront départager (pas nécessairement en totalité) entre la culture des tomates et celles des piments. Sachant qu'un hectare de tomates demande une heure de main d'œuvre et un hectare de piments demande 4 heures de main d'œuvre alors la contrainte représentant les limitations des ressources humaines est $x_1 + 4x_2 \geq 480$
- **Les limitations du bureau du périmètre irrigué** : Ces limitations exigent que l'agriculteur ne cultive pas plus de 90 hectares de tomates. La contrainte qui représente cette restriction est $x_1 \geq 90$

Méthodologie : exemples

Étape 2 : Identification des contraintes

Dans ce problème les contraintes représentent la disponibilité des **facteurs de production** :

- **Terrain** : l'agriculteur dispose de 150 hectares de terrain, ainsi la contrainte liée à la limitation de la surface de terrain est $x_1 + x_2 \geq 150$
- **Eau** : la culture d'un hectare de tomates demande $4\,m^3$ d'eau et celle d'un hectare de piments demande $2\,m^3$ mais l'agriculteur ne dispose que de $440\,m^3$. La contrainte qui exprime les limitations des ressources en eau est $4x_1 + 2x_2 \geq 440$
- **Main d'oeuvre** : Les 480 heures de main d'œuvre seront départager (pas nécessairement en totalité) entre la culture des tomates et celles des piments. Sachant qu'un hectare de tomates demande une heure de main d'œuvre et un hectare de piments demande 4 heures de main d'œuvre alors la contrainte représentant les limitations des ressources humaines est $x_1 + 4x_2 \geq 480$
- **Les limitations du bureau du périmètre irrigué** : Ces limitations exigent que l'agriculteur ne cultive pas plus de 90 hectares de tomates. La contrainte qui représente cette restriction est $x_1 \geq 90$

Méthodologie : exemples

Étape 3 : Identification de la fonction objectif.

La fonction objectif consiste à maximiser le profit apporté par la culture de tomates et de piments.
Les contributions respectives 100 et 200, des deux variables de décision x_1 et x_2 sont proportionnelles à leur valeur. La fonction objectif est donc $z = 100x_1 + 200x_2$.

Méthodologie : exemples

Exemple 1

Un agriculteur veut allouer 150 hectares de surface irrigable entre culture de tomates et celles de piments.

Il dispose de 480 heures de main d'œuvre et de $440\ m^3$ d'eau.

Un hectare de tomates demande 1 heure de main d'œuvre, $4\ m^3$ d'eau et donne un bénéfice net de 100 dirhams. Un hectare de piments demande 4 heures de main d'œuvre, $2\ m^3$ d'eau et donne un bénéfice net de 200 dirhams.

Le bureau du périmètre irrigué veut protéger le prix des tomates et ne lui permet pas de cultiver plus de 90 hectares de tomates. Quelle est la meilleure allocation de ses ressources ?

Méthodologie : exemples

Exemple 1

Un agriculteur veut allouer 150 hectares de surface irrigable entre culture de tomates et celles de piments.

Il dispose de 480 heures de main d'œuvre et de $440\ m^3$ d'eau.

Un hectare de tomates demande 1 heure de main d'œuvre, $4\ m^3$ d'eau et donne un bénéfice net de 100 dirhams. Un hectare de piments demande 4 heures de main d'œuvre, $2\ m^3$ d'eau et donne un bénéfice net de 200 dirhams.

Le bureau du périmètre irrigué veut protéger le prix des tomates et ne lui permet pas de cultiver plus de 90 hectares de tomates. Quelle est la meilleure allocation de ses ressources ?

PL

$$(PL) = \begin{cases} Max\, z = 100x_1 + 200x_2 \\ s.c \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 \geq 150 \\ 4x_1 + 2x_2 \geq 440 \\ x_1 + 4x_2 \geq 480 \\ x_1 \geq 90 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \end{cases}$$

Méthodologie : Exemples

Exemple 2

Un spécialiste en médecine a fabriqué un médicament (des pilules) pour guérir les sujets atteints d'un rhume. Ces pilules sont fabriquées selon deux formats :

- Petite taille : elle contient 2 grains d'aspirine, 5 grains de bicarbonate et 1 grain de codéine.
- Grande taille : elle contient 1 grain d'aspirine, 8 grains de bicarbonate et 6 grains de codéine.

Pour guérir la maladie, le sujet a besoin de 12 grains d'aspirine, 74 grains de bicarbonate et 24 grains de codéine. Déterminer le nombre de pilules minimales à prescrire au sujet pour qu'il soit guérit.

Question : Modéliser le problème et écrire le programme linéaire.

Méthodologie : Exemples

Étape 1 :Identification des variables de décision.

Les variables de décision qui représentent des valeurs inconnues par le décideur qui est dans ce cas le spécialiste en médecine sont :

- x_1 : le nombre de pilules de petite taille à prescrire.
- x_2 : le nombre de pilules de grande taille à prescrire.

On vérifie bien que les variables de décision x_1 et x_2 sont positives : $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Méthodologie : exemples

Étape 2 : Identification des contraintes

Les contraintes imposées par le problème sur les valeurs possibles de $x1$ et $x2$ sont :

- La prescription doit contenir des pilules avec au moins 12 grains d'aspirine. Sachant qu'une petite pilule contient 2 grains d'aspirine et qu'une grande pilule contient un seul grain d'aspirine, on obtient la contrainte suivante : $2x_1 + x_2 \geq 12$
- De la même façon que pour l'aspirine, la prescription du spécialiste en médecine doit contenir au moins 74 grains de bicarbonate. Ainsi la contrainte suivante doit être satisfaite : $5x_1 + 8x_2 \geq 74$
- Finalement la contrainte imposée par le fait que la prescription doit contenir au moins 24 grains de codéine est $x_1 + 46x_2 \geq 24$

Méthodologie : exemples

Étape 2 : Identification des contraintes

Les contraintes imposées par le problème sur les valeurs possibles de $x1$ et $x2$ sont :

- La prescription doit contenir des pilules avec au moins 12 grains d'aspirine. Sachant qu'une petite pilule contient 2 grains d'aspirine et qu'une grande pilule contient un seul grain d'aspirine, on obtient la contrainte suivante : $2x_1 + x_2 \geq 12$
- De la même façon que pour l'aspirine, la prescription du spécialiste en médecine doit contenir au moins 74 grains de bicarbonate. Ainsi la contrainte suivante doit être satisfaite : $5x_1 + 8x_2 \geq 74$
- Finalement la contrainte imposée par le fait que la prescription doit contenir au moins 24 grains de codéine est $x_1 + 46x_2 \geq 24$

Méthodologie : exemples

Étape 2 : Identification des contraintes

Les contraintes imposées par le problème sur les valeurs possibles de $x1$ et $x2$ sont :

- La prescription doit contenir des pilules avec au moins 12 grains d'aspirine. Sachant qu'une petite pilule contient 2 grains d'aspirine et qu'une grande pilule contient un seul grain d'aspirine, on obtient la contrainte suivante : $2x_1 + x_2 \geq 12$
- De la même façon que pour l'aspirine, la prescription du spécialiste en médecine doit contenir au moins 74 grains de bicarbonate. Ainsi la contrainte suivante doit être satisfaite : $5x_1 + 8x_2 \geq 74$
- Finalement la contrainte imposée par le fait que la prescription doit contenir au moins 24 grains de codéine est $x_1 + 46x_2 \geq 24$

Méthodologie : exemples

Étape 3 : Identification de la fonction objectif.

On remarque qu'il y a plusieurs couples de solutions qui peuvent satisfaire les contraintes spécifiées à l'étape 2. La prescription doit contenir le minimum possible de pilules. Donc le critère de sélection de la quantité de pilules à prescrire est celle qui minimise le nombre total des pilules $z = x_1 + x_2$

Méthodologie : exemples

Exemple 2

Un spécialiste en médecine a fabriqué un médicament (des pilules) pour guérir les sujets atteints d'un rhume. Ces pilules sont fabriquées selon deux formats :

- Petite taille : elle contient 2 grains d'aspirine, 5 grains de bicarbonate et 1 grain de codéine.
- Grande taille : elle contient 1 grain d'aspirine, 8 grains de bicarbonate et 6 grains de codéine.

Pour guérir la maladie, le sujet a besoin de 12 grains d'aspirine, 74 grains de bicarbonate et 24 grains de codéine. Déterminer le nombre de pilules minimales à prescrire au sujet pour qu'il soit guérit.

Méthodologie : exemples

Exemple 2

Un spécialiste en médecine a fabriqué un médicament (des pilules) pour guérir les sujets atteints d'un rhume. Ces pilules sont fabriquées selon deux formats :

- Petite taille : elle contient 2 grains d'aspirine, 5 grains de bicarbonate et 1 grain de codéine.
- Grande taille : elle contient 1 grain d'aspirine, 8 grains de bicarbonate et 6 grains de codéine.

Pour guérir la maladie, le sujet a besoin de 12 grains d'aspirine, 74 grains de bicarbonate et 24 grains de codéine. Déterminer le nombre de pilules minimales à prescrire au sujet pour qu'il soit guérit.

PL

Le programme linéaire qui modélise ce problème médical est donc le suivant :

$$(PL) = \begin{cases} Min\, z = x_1 + x_2 \\ s.c \qquad\quad 2x_1 + x_2 \geq 12 \\ \qquad\quad\; 5x_1 + 8x_2 \geq 74 \\ \qquad\quad\; x_1 + 46x_2 \geq 24 \geq 90 \\ \qquad\quad\; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Forme canonique d'un PL

- Problème canonique de maximisation

Pour un problème de maximisation, on peut l'écrire sous la forme canonique suivante :

$$(PL1) = \begin{cases} Max\, z = \sum_{j=1}^{n} c_j x^j \\ s.c \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x^j \leq b_i \qquad i = 1, \ldots, m \\ \qquad x_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Le programme $(PL1)$ est un problème de maximisation dont les variables x_j sont toutes non négatives et les contraintes sont du type inférieure ou égale : " $\leq$ ".

Forme canonique d'un PL

- Problème canonique de minimisation

Pour un problème de minimisation, on peut l'écrire sous la forme canonique suivante :

$$(PL2) = \begin{cases} Min\, z = \sum_{j=1}^{n} c_j x^j \\ s.c \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x^j \geq b_i \qquad i = 1, \ldots, m \\ \qquad x_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Le programme $(PL2)$ est un problème de maximisation dont les variables x_j sont toutes non négatives et les contraintes sont du type inférieure ou égale : " $\geq$ ".

Notation matricielle

Cette notation est aussi une référence non négligeable pour les problèmes de programmation linéaire.

$$(PL4) = \begin{cases} Max\, z = Cx \\ s.c \quad Ax \leq b \\ \qquad\quad x \geq 0. \end{cases}$$

Avec

$C = (c_1 \dots c_n)$: Vecteur des coefficients de l'objectif.

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$: Les variables de décisions du problème donné.

Méthodes de résolution : exemple

Exemple d'application

Une entreprise fabrique et vend deux modèles de buffets de cuisine en bois massif : le modèle A et le modèle B.

Pour le prochain exercice comptable une étude de marché a montré qu'il était possible de vendre 200 unités de A et 300 unités de B.

Le modèle A nécessite deux fois plus de bois que le modèle B, pour le nouvel exercice, l'approvisionnement prévu permettrait de fabriquer 450 buffets A.
Le modèle A est beaucoup plus travaillé et mieux fini que le modèle B, il nécessite 3 fois plus de temps de fabrication que le buffet B . Le temps de travail prévisible, pour le futur exercice, permettrai de fabriquer au maximum 660 modèles B.

La marge sur coût variable unitaire procurée par la vente d'un buffet A est de 6, celle produite par un buffet B est de 4.

L'entreprise cherche un programme de production qui lui permettrai de maximiser sa marge sur coût variable globale compte tenu des contraintes qui lui sont imposées.

Méthodes de résolution

Travail à faire :

1. Modéliser le problème moyennant un programme linéaire.
2. Donner une solution **graphique**.
3. Donner une solution par le simplexe.

Variables de decision

L'un des objectifs est de déterminer le nombre de buffets de chaque type à fabriquer et à vendre au cours du prochain exercice. Appelons :

- x le nombre de buffets A à fabriquer et à vendre ;
- y le nombre de buffets B à fabriquer et à vendre ;

x et y sont des inconnues qui peuvent prendre de nombreuses valeurs, on les appelle *variables d'activités*. Le couple (x, y) est appelé *programme*.

Si on donne à x et à y les valeurs x_1 et y_1 le couple (x_1, y_1) sera un programme de fabrication. Si on donne à x et à y les valeurs x_2 et y_2 le couple (x_2, y_2) sera un autre programme de fabrication.

Variables de decision

L'un des objectifs est de déterminer le nombre de buffets de chaque type à fabriquer et à vendre au cours du prochain exercice. Appelons :

- x le nombre de buffets A à fabriquer et à vendre ;
- y le nombre de buffets B à fabriquer et à vendre ;

x et y sont des inconnues qui peuvent prendre de nombreuses valeurs, on les appelle *variables d'activités*. Le couple (x, y) est appelé *programme*.

Si on donne à x et à y les valeurs x_1 et y_1 le couple (x_1, y_1) sera un programme de fabrication. Si on donne à x et à y les valeurs x_2 et y_2 le couple (x_2, y_2) sera un autre programme de fabrication.

Les variables x et y prennent des valeurs réelles soumises à des contraintes :

de signe

$x \geq 0$ et $y \geq 0$

Un nombre de buffets est forcément positif.

de marché :

Contraintes de marché :
$x \leq 200$ et $y \leq 300$

de fabrication :

Contraintes de fabrications :

- contraintes d'approvisionnement : $x + 2y \leq 450$;
- contraintes de temps de travail : $3x + y \leq 660$.

Les variables x et y prennent des valeurs réelles soumises à des contraintes :

de signe

$x \geq 0$ et $y \geq 0$

Un nombre de buffets est forcément positif.

de marché :

Contraintes de marché :
$x \leq 200$ et $y \leq 300$

de fabrication :

Contraintes de fabrications :

- △ contraintes d'approvisionnement : $x + 2y \leq 450$;
- △ contraintes de temps de travail : $3x + y \leq 660$.

La fonction objectif (économique) :

La marge sur coût variable globale résultant du programme (x, y) sera égale à :

$$M = 6x + 4y.$$

Le but du traitement que nous allons pratiquer est de déterminer l'ensemble des programmes (x, y) donnant à M une valeur positive et de choisir parmi ces programmes celui qui donne à M sa valeur maximale.

La fonction objectif (économique) :

La marge sur coût variable globale résultant du programme (x, y) sera égale à :

$$M = 6x + 4y.$$

Le but du traitement que nous allons pratiquer est de déterminer l'ensemble des programmes (x, y) donnant à M une valeur positive et de choisir parmi ces programmes celui qui donne à M sa valeur maximale.

Programme linéaire sous forme canonique :

Le programme linéaire qui modélise le problème est donc le suivant :

$$(PL) = \begin{cases} Max\, M = 6x + 4y \\ s.c \quad x \leq 200 \\ \qquad\quad y \leq 300 \\ \qquad\quad x + 2y \leq 450 \\ \qquad\quad 3x + y \leq 660 \\ \qquad\quad x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Ce programme linéaire permet la recherche du **maximum** d'une **fonction économique linéaire** sous des **contrainte linéaires**.

Programme linéaire sous forme standard :

Pour traiter algébriquement un programme linéaire il est nécessaire de transformer les inéquations du programme canonique en équations.

Pour cela des **variables d'écart** sont introduites dans ces dernières
Soient t_1, t_2, t_3 et t_4 les variables d'écart correspondant à notre exemple. L'écriture du programme linéaire sous forme d'équations le met sous forme **standard**.

Programme linéaire sous forme standard :

Pour traiter algébriquement un programme linéaire il est nécessaire de transformer les inéquations du programme canonique en équations.

Pour cela des **variables d'écart** sont introduites dans ces dernières
Soient t_1, t_2, t_3 et t_4 les variables d'écart correspondant à notre exemple. L'écriture du programme linéaire sous forme d'équations le met sous forme **standard**.

$$(S_0) = \begin{cases} Max\, M = 6x + 4y \\ s.c \quad \begin{array}{l} x + t_1 = 200 \\ y + t_2 = 300 \\ x + 2y + t_3 = 450 \\ 3x + y + t_4 = 660 \\ x \geq 0, y \geq 0, t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, t_3 \geq 0, t_4 \geq 0. \end{array} \end{cases}$$

$$(S_0) = \begin{cases} Max\, M = 6x + 4y \\ s.c \quad \begin{array}{l} x + t_1 = 200 \\ y + t_2 = 300 \\ x + 2y + t_3 = 450 \\ 3x + y + t_4 = 660 \\ x \geq 0, y \geq 0, t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, t_3 \geq 0, t_4 \geq 0. \end{array} \end{cases}$$

Chaque contrainte économique est transformée en équation par l'adjonction d'une variable d'écart positive. La saturation d'une contrainte entraîne l'annulation de la variable d'écart correspondante.

Le programme linéaire sous sa forme standard comporte 4 équations et 6 inconnues : 2 variables d'activité et 4 variables d'écart. Il constitue le système S_0.

A noter

- Les variables d'écart : **les variables de base** ;
- Les autres : **les variables hors base**.

$$(S_0) = \begin{cases} Max\, M = 6x + 4y \\ s.c \quad x + t_1 = 200 \\ \qquad\quad y + t_2 = 300 \\ \qquad\quad x + 2y + t_3 = 450 \\ \qquad\quad 3x + y + t_4 = 660 \\ \qquad\quad x \geq 0, y \geq 0, t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, t_3 \geq 0, t_4 \geq 0. \end{cases}$$

Chaque contrainte économique est transformée en équation par l'adjonction d'une variable d'écart positive. La saturation d'une contrainte entraîne l'annulation de la variable d'écart correspondante.

Le programme linéaire sous sa forme standard comporte 4 équations et 6 inconnues : 2 variables d'activité et 4 variables d'écart. Il constitue le système S_0.

A noter

- Les variables d'écart : **les variables de base** ;
- Les autres : **les variables hors base**.

Méthode des tableaux (matriciel)

Le problème à traiter est représenté sous forme de tableau :

Système S_0 :

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	T	R
1	0	1	0	0	0	200	
0	1	0	1	0	0	300	
1	2	0	0	1	0	450	
3	1	0	0	0	1	660	
6	4	0	0	0	0	0	

Méthode des tableaux (matriciel)

Les coefficients d'une même variable figurent dans la même colonne. Les termes indépendants sont la colonne T. Les coefficients de la fonction économique figurent dans la ligne du bas. la valeur de M correspondant au système d'équations du tableau se trouve dans case en bas à droite.

Les coefficients différents de zéro de la fonction économique sont toujours situés sous les variables hors base. Les coefficients des variables dans la base ne sont représentés que par un seul 1 dans la colonne et des zéros ailleurs.

Pour S_0 nous voyons donc immédiatement que x et y sont hors base et nous savons que les variables hors base sont nulles. La valeur d'une variable dans la base est donnée par le terme indépendant situé sur la ligne du 1 de la colonne de cette variable.

Méthode des tableaux (suite) :

On lit facilement la solution du système S_0 :

$$x = 0 \text{ et } y = 0$$

$$t_1 = 200$$
$$t_2 = 300$$
$$t_3 = 450$$
$$t_4 = 660$$

$$M_0 = 0$$

Dans la colonne R figureront les résultats de la division des termes indépendants par les coefficients de la colonne du pivot.

Première itération :

a- Sélection de la variable entrante dans la base

La variable entrante correspond au coefficient positif le plus élévé de la fonction économique (ici 6), la variable entrante est donc x. Le pivot de la transformation de S_0 en S_1 se trouve dans la colonne des coefficients de la variable entrante.

Système S_0 :

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	T	R
1	0	1	0	0	0	200	
0	1	0	1	0	0	300	
1	2	0	0	1	0	450	
3	1	0	0	0	1	660	
6	4	0	0	0	0	0	

4.1. Première itération :

a- Sélection de la variable entrante dans la base

La variable entrante correspond au coefficient positif le plus élévé de la fonction économique (ici 6), la variable entrante est donc x. Le pivot de la transformation de S_0 en S_1 se trouve dans la colonne des coefficients de la variable entrante.

Système S_0 :

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	T	R
1	0	1	0	0	0	200	
0	1	0	1	0	0	300	
1	2	0	0	1	0	450	
3	1	0	0	0	1	660	
6	4	1	0	0	0	0	

4.1. Première itération :

a- Sélection de la variable entrante dans la base

La variable entrante correspond au coefficient positif le plus élévé de la fonction économique (ici 6), la variable entrante est donc x. Le pivot de la transformation de S_0 en S_1 se trouve dans la colonne des coefficients de la variable entrante.
Système S_0 :

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	T	R
1	0	1	0	0	0	200	
0	1	0	1	0	0	300	
1	2	0	0	1	0	450	
3	1	0	0	0	1	660	
6	4	1	0	0	0	0	

4.1. Première itération (suite) :

b- Sélection de la variable sortante

Les termes indépendants T sont divisés par les coefficients de la colonne du pivot pour donner les rapports R. On sélectionne R le plus petit, (ici 200). Le plus petit R nous indique la ligne dans laquelle figure le pivot. Le pivot se trouve à l'intersection de la colonne du pivot et la ligne du pivot, ici 1. La variable sortante est la variable dans la base dont le coefficient 1 est situé dans la ligne du pivot, ici t_1 sera la variable sortante de la base.

Système S_0 :

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	T	R
1	0	1	0	0	0	200	$200/1 = 200$
0	1	0	1	0	0	300	$300/0 = \infty$
1	2	0	0	1	0	450	$450/1 = 450$
3	1	0	0	0	1	660	$660/3 = 220$
6	4	1	0	0	0	0	

4.1. Première itération (suite) :

b- Sélection de la variable sortante

Les termes indépendants T sont divisés par les coefficients de la colonne du pivot pour donner les rapports R. On sélectionne R le plus petit, (ici 200). Le plus petit R nous indique la ligne dans laquelle figure le pivot. Le pivot se trouve à l'intersection de la colonne du pivot et la ligne du pivot, ici 1. La variable sortante est la variable dans la base dont le coefficient 1 est situé dans la ligne du pivot, ici t_1 sera la variable sortante de la base.

Système S_0 :

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	T	R
1	0	1	0	0	0	200	$200/1 = 200$
0	1	0	1	0	0	300	$300/0 = \infty$
1	2	0	0	1	0	450	$450/1 = 450$
3	1	0	0	0	1	660	$660/3 = 220$
6	4	1	0	0	0	0	

4.1. Première itération (suite) :

b- Sélection de la variable sortante

Les termes indépendants T sont divisés par les coefficients de la colonne du pivot pour donner les rapports R. On sélectionne R le plus petit, (ici 200). Le plus petit R nous indique la ligne dans laquelle figure le pivot. Le pivot se trouve à l'intersection de la colonne du pivot et la ligne du pivot, ici 1. La variable sortante est la variable dans la base dont le coefficient 1 est situé dans la ligne du pivot, ici t_1 sera la variable sortante de la base.

Système S_0 :

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	T	R
1	0	1	0	0	0	200	$200/1 = 200$
0	1	0	1	0	0	300	$300/0 = \infty$
1	2	0	0	1	0	450	$450/1 = 450$
3	1	0	0	0	1	660	$660/3 = 220$
6	4	1	0	0	0	0	

4.1. Première itération (suite) :

b- Sélection de la variable sortante

Les termes indépendants T sont divisés par les coefficients de la colonne du pivot pour donner les rapports R. On sélectionne R le plus petit, (ici 200). Le plus petit R nous indique la ligne dans laquelle figure le pivot. Le pivot se trouve à l'intersection de la colonne du pivot et la ligne du pivot, ici 1. La variable sortante est la variable dans la base dont le coefficient 1 est situé dans la ligne du pivot, ici t_1 sera la variable sortante de la base.

Système S_0 :

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	T	R
1	0	1	0	0	0	200	$\mathbf{200/1 = 200}$
0	1	0	1	0	0	300	$300/0 = \infty$
1	2	0	0	1	0	450	$450/1 = 450$
3	1	0	0	0	1	660	$660/3 = 220$
$\mathbf{6}$	4	1	0	0	0	0	

4.1. Première itération (suite) :

b- Sélection de la variable sortante

Les termes indépendants T sont divisés par les coefficients de la colonne du pivot pour donner les rapports R. On sélectionne R le plus petit, (ici 200). Le plus petit R nous indique la ligne dans laquelle figure le pivot. Le pivot se trouve à l'intersection de la colonne du pivot et la ligne du pivot, ici 1. La variable sortante est la variable dans la base dont le coefficient 1 est situé dans la ligne du pivot, ici t_1 sera la variable sortante de la base.

Système S_0 :

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	T	R
1	0	1	0	0	0	200	$\mathbf{200/1 = 200}$
0	1	0	1	0	0	300	$300/0 = \infty$
1	2	0	0	1	0	450	$450/1 = 450$
3	1	0	0	0	1	660	$660/3 = 220$
$\mathbf{6}$	4	1	0	0	0	0	

4.1. Première itération (suite) :

b- Sélection de la variable sortante

Les termes indépendants T sont divisés par les coefficients de la colonne du pivot pour donner les rapports R. On sélectionne R le plus petit, (ici 200). Le plus petit R nous indique la ligne dans laquelle figure le pivot. Le pivot se trouve à l'intersection de la colonne du pivot et la ligne du pivot, ici 1. La variable sortante est la variable dans la base dont le coefficient 1 est situé dans la ligne du pivot, ici t_1 sera la variable sortante de la base.

Système S_0 :

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	T	R
1	0	1	0	0	0	200	$\mathbf{200/1 = 200}$
0	1	0	1	0	0	300	$300/0 = \infty$
1	2	0	0	1	0	450	$450/1 = 450$
3	1	0	0	0	1	660	$660/3 = 220$
6	4	1	0	0	0	0	

4.1. Première itération (suite) :

b- Sélection de la variable sortante

Les termes indépendants T sont divisés par les coefficients de la colonne du pivot pour donner les rapports R. On sélectionne R le plus petit, (ici 200). Le plus petit R nous indique la ligne dans laquelle figure le pivot. Le pivot se trouve à l'intersection de la colonne du pivot et la ligne du pivot, ici 1. La variable sortante est la variable dans la base dont le coefficient 1 est situé dans la ligne du pivot, ici t_1 sera la variable sortante de la base.

Système S_0 :

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	T	R
1	0	**1**	0	0	0	200	$\mathbf{200/1 = 200}$
0	1	0	1	0	0	300	$300/0 = \infty$
1	2	0	0	1	0	450	$450/1 = 450$
3	1	0	0	0	1	660	$660/3 = 220$
6	4	1	0	0	0	0	

4.1. Première itération (suite) :

b- Sélection de la variable sortante

Les termes indépendants T sont divisés par les coefficients de la colonne du pivot pour donner les rapports R. On sélectionne R le plus petit, (ici 200). Le plus petit R nous indique la ligne dans laquelle figure le pivot. Le pivot se trouve à l'intersection de la colonne du pivot et la ligne du pivot, ici 1. La variable sortante est la variable dans la base dont le coefficient 1 est situé dans la ligne du pivot, ici t_1 sera la variable sortante de la base.

Système S_0 :

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	T	R
1	0	**1**	0	0	0	200	$\mathbf{200/1 = 200}$
0	1	0	1	0	0	300	$300/0 = \infty$
1	2	0	0	1	0	450	$450/1 = 450$
3	1	0	0	0	1	660	$660/3 = 220$
6	4	1	0	0	0	0	

Première itération (suite) :

c- Pivotage

Pour passer de S_0 à S_1 nous allons faire pivoter la matrice des coefficients autour du pivot. Les opérations de pivotage sont décrites ci-après, Ces règles de pivotage seront appliquées systématiquement à chaque itération :

1- On divise la ligne de pivot par le pivot.

2- Pour les autres coefficients on applique la règle du rectangle

$$\begin{array}{ccccc} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \textcircled{a} & \cdots & b & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & c & \cdots & d & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{array}$$

$$\begin{cases} a \text{ est le pivot} \\ b \text{ est dans la ligne du pivot} \\ c \text{ est dans la colonne du pivot} \end{cases}$$

4.1. Première itération (suite) :

Soit $a^{'}$, $b^{'}$, $c^{'}$ et $d^{'}$ les coefficients que nous souhaitons obtenir à la place respectivement de a, b, c et d.

La division de la ligne par le pivot donne ceci :

$$\begin{array}{ccccc} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots & b/a & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 0 & \cdots & d^{'} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{array} \quad \begin{cases} a^{'} = 1 \text{ et } b^{'} = \frac{b}{a} \\ \\ c^{'} = 0 \text{ et } d^{'} = d - \frac{c}{a} \times b \end{cases}$$

Lorsque l'on applique la règle de calcul pour $c^{'}$ on obtient :

$$c^{'} = c - \frac{c}{a} \times a = 0$$

4.1. Première itération (suite) :

3- Règle de simplification :

- si zéro figure dans la ligne du pivot, la colonne correspondante est invariante, on la recopie ;
- si un zéro figure dans la colonne du pivot, la ligne correspondante est invariante, on la recopie.

En appliquant ces règles on obtient le système S_1

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	T	R
1	0	1	0	0	0	200	
0	1	0	1	0	0	300	
0	2	-1	0	1	0	250	
0	1	-3	0	0	1	60	
0	4	-6	0	0	0	-1200	

La solution du système S_2 se lit aisément :

Hors base $y = 0$
$t_1 = 0$

Dans la base : $x = 200$
$t_2 = 300$
$t_3 = 250$
$t_4 = 60$

.

La valeur de M_1 est bien 1200. Le signe négatif vient du fait que le tableau ne donne pas $M_1 = 4y - 6t_1 + 1200$ mais :

$$4y - 6t_1 = M_1 - 1200$$

On devrait inscrire $M_1 - 1200$ dans la case en bas à droite mais par simplification de la présentation seul figure -1200.

Nous constatons que la fonction économique comporte un coefficient positif (4) donc on peut encore améliorer la marge sur coût variable.

Deuxième itération :

a- Sélection de la variable entrante dans la base

La variable entrante correspond au coefficient positif le plus élévé de la fonction économique (ici 4), la variable entrante est donc y. Le pivot de la transformation de S_1 en S_2 se trouve dans la colonne des coefficients de la variable entrante y.

Système S_1 :

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	T	R
1	0	1	0	0	0	200	
0	1	0	1	0	0	300	
0	2	-1	0	1	0	250	
0	1	-3	0	0	1	60	
0	4	-6	0	0	0	-1200	

Deuxième itération :

a- Sélection de la variable entrante dans la base

La variable entrante correspond au coefficient positif le plus élévé de la fonction économique (ici 4), la variable entrante est donc y. Le pivot de la transformation de S_1 en S_2 se trouve dans la colonne des coefficients de la variable entrante y.

Système S_1 :

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	T	R
1	0	1	0	0	0	200	
0	1	0	1	0	0	300	
0	2	-1	0	1	0	250	
0	1	-3	0	0	1	60	
0	4	-6	0	0	0	-1200	

Deuxième itération :

a- Sélection de la variable entrante dans la base

La variable entrante correspond au coefficient positif le plus élévé de la fonction économique (ici 4), la variable entrante est donc y. Le pivot de la transformation de S_1 en S_2 se trouve dans la colonne des coefficients de la variable entrante y.
Système S_1 :

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	T	R
1	0	1	0	0	0	200	
0	1	0	1	0	0	300	
0	2	-1	0	1	0	250	
0	1	-3	0	0	1	60	
0	4	-6	0	0	0	-1200	

Deuxième itération (suite) :

b- Sélection de la variable sortante

Les termes indépendants T sont divisés par les coefficients de la colonne du pivot pour donner les rapports R. On sélectionne R le plus petit, (ici 60). Le plus petit R nous indique la ligne dans laquelle figure le pivot. Le pivot se trouve à l'intersection de la colonne du pivot et la ligne du pivot, ici 1. La variable sortante est la variable dans la base dont le coefficient 1 est situé dans la ligne du pivot, ici t_4 sera la variable sortante de la base.

Système S_1 :

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	T	R
1	0	1	0	0	0	200	$200/1 = \infty$
0	0	3	1	0	-1	300	$300/1 = 300$
0	0	5	0	1	-2	130	$250/2 = 125$
0	1	-3	0	0	-4	60	$60/1 = 60$
0	4	-6	0	0	0	-1200	

Deuxième itération (suite) :

b- Sélection de la variable sortante

Les termes indépendants T sont divisés par les coefficients de la colonne du pivot pour donner les rapports R. On sélectionne R le plus petit, (ici 60). Le plus petit R nous indique la ligne dans laquelle figure le pivot. Le pivot se trouve à l'intersection de la colonne du pivot et la ligne du pivot, ici 1. La variable sortante est la variable dans la base dont le coefficient 1 est situé dans la ligne du pivot, ici t_4 sera la variable sortante de la base.

Système S_1 :

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	T	R
1	0	1	0	0	0	200	$200/0 = \infty$
0	1	0	1	0	0	300	$300/1 = 300$
0	2	-1	0	1	0	250	$250/2 = 125$
0	1	-3	0	0	1	60	$60/1 = 60$
0	$\mathbf{4}$	1	0	0	0	0	

Deuxième itération (suite) :

b- Sélection de la variable sortante

Les termes indépendants T sont divisés par les coefficients de la colonne du pivot pour donner les rapports R. On sélectionne R le plus petit, (ici 60). Le plus petit R nous indique la ligne dans laquelle figure le pivot. Le pivot se trouve à l'intersection de la colonne du pivot et la ligne du pivot, ici 1. La variable sortante est la variable dans la base dont le coefficient 1 est situé dans la ligne du pivot, ici t_4 sera la variable sortante de la base.

Système S_1 :

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	T	R
1	0	1	0	0	0	200	$200/0 = \infty$
0	1	0	1	0	0	300	$300/1 = 300$
0	2	-1	0	1	0	250	$250/2 = 125$
0	1	-3	0	0	1	60	$60/1 = 60$
0	**4**	1	0	0	0	0	

Deuxième itération (suite) :

b- Sélection de la variable sortante

Les termes indépendants T sont divisés par les coefficients de la colonne du pivot pour donner les rapports R. On sélectionne R le plus petit, (ici 60). Le plus petit R nous indique la ligne dans laquelle figure le pivot. Le pivot se trouve à l'intersection de la colonne du pivot et la ligne du pivot, ici 1. La variable sortante est la variable dans la base dont le coefficient 1 est situé dans la ligne du pivot, ici t_4 sera la variable sortante de la base.

Système S_1 :

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	T	R
1	0	1	0	0	0	200	$200/0 = \infty$
0	1	0	1	0	0	300	$300/1 = 300$
0	2	-1	0	1	0	250	$250/2 = 125$
0	1	-3	0	0	1	60	$60/1 = 60$
0	$\mathbf{4}$	1	0	0	0	0	

Deuxième itération (suite) :

b- Sélection de la variable sortante

Les termes indépendants T sont divisés par les coefficients de la colonne du pivot pour donner les rapports R. On sélectionne R le plus petit, (ici 60). Le plus petit R nous indique la ligne dans laquelle figure le pivot. Le pivot se trouve à l'intersection de la colonne du pivot et la ligne du pivot, ici 1. La variable sortante est la variable dans la base dont le coefficient 1 est situé dans la ligne du pivot, ici t_4 sera la variable sortante de la base.

Système S_1 :

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	T	R
1	0	1	0	0	0	200	$200/0 = \infty$
0	1	0	1	0	0	300	$300/1 = 300$
0	2	-1	0	1	0	250	$250/2 = 125$
0	1	-3	0	0	1	60	$60/1 = 60$
0	$\mathbf{4}$	1	0	0	0	0	

Deuxième itération (suite) :

b- Sélection de la variable sortante

Les termes indépendants T sont divisés par les coefficients de la colonne du pivot pour donner les rapports R. On sélectionne R le plus petit, (ici 60). Le plus petit R nous indique la ligne dans laquelle figure le pivot. Le pivot se trouve à l'intersection de la colonne du pivot et la ligne du pivot, ici 1. La variable sortante est la variable dans la base dont le coefficient 1 est situé dans la ligne du pivot, ici t_4 sera la variable sortante de la base.

Système S_1 :

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	T	R
1	0	1	0	0	0	200	$200/0 = \infty$
0	1	0	1	0	0	300	$300/1 = 300$
0	2	-1	0	1	0	250	$250/2 = 125$
0	$\mathbf{1}$	-3	0	0	1	60	$60/1 = 60$
0	$\mathbf{4}$	1	0	0	0	0	

Deuxième itération (suite) :

b- Sélection de la variable sortante

Les termes indépendants T sont divisés par les coefficients de la colonne du pivot pour donner les rapports R. On sélectionne R le plus petit, (ici 60). Le plus petit R nous indique la ligne dans laquelle figure le pivot. Le pivot se trouve à l'intersection de la colonne du pivot et la ligne du pivot, ici 1. La variable sortante est la variable dans la base dont le coefficient 1 est situé dans la ligne du pivot, ici t_4 sera la variable sortante de la base.

Système S_1 :

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	T	R
1	0	1	0	0	0	200	$200/0 = \infty$
0	1	0	1	0	0	300	$300/1 = 300$
0	2	-1	0	1	0	250	$250/2 = 125$
0	$\mathbf{1}$	-3	0	0	$\mathbf{1}$	60	$60/1 = 60$
0	$\mathbf{4}$	1	0	0	0	0	

Deuxième itération (suite) :

b- Sélection de la variable sortante

Les termes indépendants T sont divisés par les coefficients de la colonne du pivot pour donner les rapports R. On sélectionne R le plus petit, (ici 60). Le plus petit R nous indique la ligne dans laquelle figure le pivot. Le pivot se trouve à l'intersection de la colonne du pivot et la ligne du pivot, ici 1. La variable sortante est la variable dans la base dont le coefficient 1 est situé dans la ligne du pivot, ici t_4 sera la variable sortante de la base.

Système S_1 :

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	T	R
1	0	1	0	0	0	200	$200/0 = \infty$
0	1	0	1	0	0	300	$300/1 = 300$
0	2	-1	0	1	0	250	$250/2 = 125$
0	$\mathbf{1}$	-3	0	0	$\mathbf{1}$	60	$60/1 = 60$
0	$\mathbf{4}$	1	0	0	0	0	

Deuxième itération (suite) :

c- Pivotage

En appliquant Les règles du pivotage décrites précédemment pour obtenir le système S_2

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	T	R
1	0	1	0	0	0	200	
0	0	3	1	0	-1	240	
0	0	5	0	1	-2	130	
0	1	-3	0	0	1	60	
0	0	6	0	0	-4	-1440	

La solution du système S_2 est la suivante :

Hors base $t_1 = 0$ $t_4 = 0$

Dans la base : $x = 200$ $y = 60$ $t_2 = 240$ $t_3 = 130$

.

$$M_2 = 1440$$

Nous constatons que la fonction économique comporte un coefficient positif (6) donc on peut encore améliorer la marge sur coût variable globale.

Troisième itération :

a- Sélection de la variable entrante dans la base

La variable entrante correspond au coefficient positif le plus élévé de la fonction économique (ici 6), la variable entrante est donc t_1. Le pivot de la transformation de S_2 en S_3 se trouve dans la colonne des coefficients de la variable entrante t_1.

Système S_2 :

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	T	R
1	0	1	0	0	0	200	
0	0	3	1	1	-1	240	
0	0	5	0	0	-2	130	
0	1	-3	0	0	1	60	
0	0	6	0	0	-4	-1440	

Troisième itération :

a- Sélection de la variable entrante dans la base

La variable entrante correspond au coefficient positif le plus élévé de la fonction économique (ici 6), la variable entrante est donc t_1. Le pivot de la transformation de S_2 en S_3 se trouve dans la colonne des coefficients de la variable entrante t_1.

Système S_2 :

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	T	R
1	0	1	0	0	0	200	
0	0	3	1	1	-1	240	
0	0	5	0	0	-2	130	
0	1	-3	0	0	1	60	
0	0	6	0	0	-4	-1440	

Troisième itération :

a- Sélection de la variable entrante dans la base

La variable entrante correspond au coefficient positif le plus élévé de la fonction économique (ici 6), la variable entrante est donc t_1. Le pivot de la transformation de S_2 en S_3 se trouve dans la colonne des coefficients de la variable entrante t_1.
Système S_2 :

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	T	R
1	0	1	0	0	0	200	
0	0	3	1	1	-1	240	
0	0	5	0	0	-2	130	
0	1	-3	0	0	1	60	
0	0	6	0	0	-4	-1440	

Troisième itération (suite) :

b- Sélection de la variable sortante

Les termes indépendants T sont divisés par les coefficients de la colonne du pivot pour donner les rapports R. On sélectionne R le plus petit, (ici 26). Le plus petit R nous indique la ligne dans laquelle figure le pivot. Le pivot se trouve à l'intersection de la colonne du pivot et la ligne du pivot, ici 5. La variable sortante est la variable dans la base dont le coefficient 1 est situé dans la ligne du pivot, ici t_3 sera la variable sortante de la base.

Système S_3 :

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	T	R
1	0	1	0	0	0	200	$200/1 = 200$
0	0	3	1	0	-1	240	$240/3 = 80$
0	0	5	0	1	-2	130	$130/5 = 26$
0	1	-3	0	0	1	60	$60/(-3) = -20$
0	4	6	0	0	-4	-1440	

Troisième itération (suite) :

b- Sélection de la variable sortante

Les termes indépendants T sont divisés par les coefficients de la colonne du pivot pour donner les rapports R. On sélectionne R le plus petit, (ici 26). Le plus petit R nous indique la ligne dans laquelle figure le pivot. Le pivot se trouve à l'intersection de la colonne du pivot et la ligne du pivot, ici 5. La variable sortante est la variable dans la base dont le coefficient 1 est situé dans la ligne du pivot, ici t_3 sera la variable sortante de la base.

Système S_3 :

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	T	R
1	0	1	0	0	0	200	$200/1 = 200$
0	0	3	1	0	-1	240	$240/3 = 80$
0	0	5	0	1	-2	130	$130/5 = 26$
0	1	-3	0	0	1	60	$60/(-3) = -20$
0	4	6	0	0	-4	-1440	

Troisième itération (suite) :

b- Sélection de la variable sortante

Les termes indépendants T sont divisés par les coefficients de la colonne du pivot pour donner les rapports R. On sélectionne R le plus petit, (ici 26). Le plus petit R nous indique la ligne dans laquelle figure le pivot. Le pivot se trouve à l'intersection de la colonne du pivot et la ligne du pivot, ici 5. La variable sortante est la variable dans la base dont le coefficient 1 est situé dans la ligne du pivot, ici t_3 sera la variable sortante de la base.

Système S_3 :

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	T	R
1	0	1	0	0	0	200	$200/1 = 200$
0	0	3	1	0	-1	240	$240/3 = 80$
0	0	5	0	1	-2	130	$130/5 = 26$
0	1	-3	0	0	1	60	$60/(-3) = -20$
0	4	6	0	0	-4	-1440	

Troisième itération (suite) :

b- Sélection de la variable sortante

Les termes indépendants T sont divisés par les coefficients de la colonne du pivot pour donner les rapports R. On sélectionne R le plus petit, (ici 26). Le plus petit R nous indique la ligne dans laquelle figure le pivot. Le pivot se trouve à l'intersection de la colonne du pivot et la ligne du pivot, ici 5. La variable sortante est la variable dans la base dont le coefficient 1 est situé dans la ligne du pivot, ici t_3 sera la variable sortante de la base.

Système S_3 :

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	T	R
1	0	1	0	0	0	200	$200/1 = 200$
0	0	3	1	0	-1	240	$240/3 = 80$
0	0	5	0	1	-2	130	$130/5 = 26$
0	1	-3	0	0	1	60	$60/(-3) = -20$
0	4	6	0	0	-4	-1440	

Troisième itération (suite) :

b- Sélection de la variable sortante

Les termes indépendants T sont divisés par les coefficients de la colonne du pivot pour donner les rapports R. On sélectionne R le plus petit, (ici 26). Le plus petit R nous indique la ligne dans laquelle figure le pivot. Le pivot se trouve à l'intersection de la colonne du pivot et la ligne du pivot, ici 5. La variable sortante est la variable dans la base dont le coefficient 1 est situé dans la ligne du pivot, ici t_3 sera la variable sortante de la base.

Système S_3 :

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	T	R
1	0	1	0	0	0	200	$200/1 = 200$
0	0	3	1	0	-1	240	$240/3 = 80$
0	0	5	0	1	-2	130	$130/5 = 26$
0	1	-3	0	0	1	60	$60/(-3) = -20$
0	4	6	0	0	-4	-1440	

Troisième itération (suite) :

b- Sélection de la variable sortante

Les termes indépendants T sont divisés par les coefficients de la colonne du pivot pour donner les rapports R. On sélectionne R le plus petit, (ici 26). Le plus petit R nous indique la ligne dans laquelle figure le pivot. Le pivot se trouve à l'intersection de la colonne du pivot et la ligne du pivot, ici 5. La variable sortante est la variable dans la base dont le coefficient 1 est situé dans la ligne du pivot, ici t_3 sera la variable sortante de la base.

Système S_3 :

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	T	R
1	0	1	0	0	0	200	$200/1 = 200$
0	0	3	1	0	-1	240	$240/3 = 80$
0	0	$\mathbf{5}$	0	1	-2	130	$130/5 = 26$
0	1	-3	0	0	1	60	$60/(-3) = -20$
0	4	6	0	0	-4	-1440	

Troisième itération (suite) :

b- Sélection de la variable sortante

Les termes indépendants T sont divisés par les coefficients de la colonne du pivot pour donner les rapports R. On sélectionne R le plus petit, (ici 60). Le plus petit R nous indique la ligne dans laquelle figure le pivot. Le pivot se trouve à l'intersection de la colonne du pivot et la ligne du pivot, ici 1. La variable sortante est la variable dans la base dont le coefficient 1 est situé dans la ligne du pivot, ici t_4 sera la variable sortante de la base.

Système S_2 :

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	T	R
1	0	1	0	0	0	200	$200/1 = 200$
0	0	3	1	0	-1	240	$240/3 = 80$
0	0	$\mathbf{5}$	0	$\mathbf{1}$	-2	130	$130/5 = 26$
0	1	-3	0	0	1	60	$60/(-3) = -20$
0	4	6	0	0	-4	-1440	

Troisième itération (suite) :

b- Sélection de la variable sortante

Les termes indépendants T sont divisés par les coefficients de la colonne du pivot pour donner les rapports R. On sélectionne R le plus petit, (ici 26). Le plus petit R nous indique la ligne dans laquelle figure le pivot. Le pivot se trouve à l'intersection de la colonne du pivot et la ligne du pivot, ici 5. La variable sortante est la variable dans la base dont le coefficient 1 est situé dans la ligne du pivot, ici t_3 sera la variable sortante de la base.
Système S_3 :

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	T	R
1	0	1	0	0	0	200	$200/1 = 200$
0	0	3	1	0	-1	240	$240/3 = 80$
0	0	$\mathbf{5}$	0	$\mathbf{1}$	-2	130	$130/5 = 26$
0	1	-3	0	0	1	60	$60/(-3) = -20$
0	4	6	0	0	-4	-1440	

Troisième itération (suite) :

c- Pivotage

En appliquant Les règles du pivotage décrites précédemment pour obtenir le système S_2

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	T	R
1	0	0	0	-0.2	0.4	174	
0	0	0	1	-0.6	-0.2	162	
0	0	1	0	0.2	-0.4	26	
0	1	0	0	0.6	-0.2	138	
0	0	0	0	-2	-2	-1596	

La solution du système S_3 est la suivante :

Hors base $t_3 = 0$, $t_4 = 0$

Dans la base : $x = 174$, $y = 138$, $t_1 = 26$, $t_2 = 162$

.

$$M_2 = 1596$$

Nous constatons que la fonction économique ne comporte plus de coefficients positif, donc on ne peut plus améliorer la marge sur coût variable globale. L'algorithme est arrêté après dernière itération.